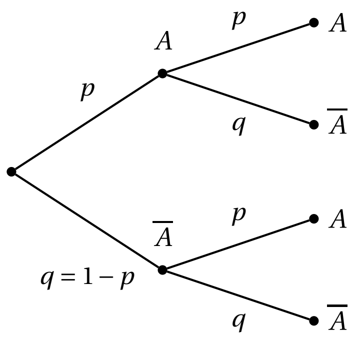
1 Répétition de n d'expériences identiques et indépendantes

On représente la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré comme ci-contre



Propriétés 1. *Dans un arbre pondéré représentant la répétition d'expériences identiques et indépendantes*

- *La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud vaut 1.*
- *La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.*
- *La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues conduisant à la réalisation de A.*

2 Loi de Bernoulli

Définition 1. *On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p une expérience aléatoire présentant deux issues : l'une S , que l'on appelle "succès" de probabilité p et l'autre E ou $\overline{S}$, appelée "échec" de probabilité q, avec $q = 1 - p$.*

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Propriétés 2.

1. $E(X) = p$
2. $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$
3. $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

3 Loi Binomiale

3.1 Schéma de Bernoulli

Définition 2. *On appelle schéma de Bernoulli l'expérience aléatoire consistant à répéter n fois et de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.*

4 Coefficients binomiaux

4.1 Coefficients binomiaux

Définition 3. *Soit n un entier naturel non nul et k un entier compris entre 0 et n.*
Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins de l'arbre réalisant exactement k succès lors des n répétitions.

Propriétés 3.

1. *Pour tout entier k compris entre 0 et n :*
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. *Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$:*
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(Formule de PASCAL)*

4.2 Calcul des coefficients binomiaux : le triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet de retrouver les premiers nombres $\binom{n}{p}$

$p \rightarrow$	0	1	2	3	4
$n=0$	1				
$n=1$	1	1			
$n=2$	1	2	1		
$n=3$	1	3	3	1	
$n=4$	1	4	6	4	1

$$\begin{array}{cccccc}
 & & p-1 & & p & \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
n-1 & \dots & \binom{n-1}{p-1} & + & \binom{n-1}{p} & \dots \\
 & & & & = & \\
n & \dots & & & \binom{n}{p} & \dots \\
 & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

5 Loi binomiale

Définition 4.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p (schéma de Bernoulli). La loi de X s'appelle loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n,p)$.

Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. L'événement $(X=k)$ est réalisé lorsqu'on a obtenu k succès et $n-k$ échecs.

Propriétés 4. *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres (n, p).*
X prend ses valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ et pour tout entier k tel que $(0 \leqslant k \leqslant n)$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Propriétés 5.

1. $E(X) = np$

2. $V(X) = npq$
3. $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

6 Intervalle de fluctuation d'une fréquence

6.1 Intervalle de fluctuation d'une fréquence

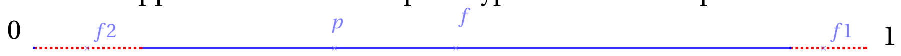
On considère une population dans laquelle une proportion p d'individus possède un certain caractère.
On prélève dans cette population un échantillon de taille n.
La variable aléatoire égale au nombre d'individus de l'échantillon possédant ce caractère suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Soient
• a le plus grand entier tel que $P(X < a) \leqslant 0,025$
• b le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.
On a $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X < a) \geqslant 0,95$.
Soit $F = \dfrac{X}{n}$ la fréquence du caractère étudié de l'échantillon : $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F \leqslant \dfrac{b}{n}\right) \geqslant 0,95$.

Définition 5. *L'intervalle* $\left[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right]$ *est appelé intervalle de fluctuation de la variable aléatoire F au seuil de confiance 0,95.*

6.2 Prise de décision sur un échantillon

On fait l'hypothèse que la proportion des individus de la population présentant un caractère donné est p.
On détermine un intervalle de fluctuation de la fréquence F au seuil de 0,95.
Si la fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, on rejettera l'hypothèse faite sur p avec un risque de se tromper d'au plus 5 %.

f appartient à I : On accepte l'hypothèse faite sur p



f1 n'appartient pas à I : on rejette l'hypothèse faite sur p
f2 n'appartient pas à I : on rejette l'hypothèse faite sur p

7 EXERCICES : Les exercices de base

1. (a) Interpréter $\binom{1}{6}$ et en donner la valeur.

   (b) Sachant que $\binom{2}{6} = 15$, en déduire $\binom{2}{7}$.

   (c) Déterminer $\binom{5}{7}$.

2. Démontrer que : $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$

3. Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5×10^{-3}.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de résistances défectueuse. Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir :

   (a) Exactement deux résistances défectueuses ?

   (b) Au plus deux résistances défectueuses ?

   (c) Au moins deux résistances défectueuses ?

4. Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés. On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de 11 jours consécutifs.

   (a) Quelle est la loi de X ?

   (b) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?

   (c) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

5. Un pépiniériste conditionne des bulbes de fleurs .On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83. Il prélève au hasard successivement quinze bulbes de ce stock. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.

   (a) Quelle est la loi de X ?

   (b) Quelle est la probabilité qu' exactement 5 bulles choisis germent ?

   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins 9 bulles germent ?

   (d) En moyenne, sur un prélèvement de 15 bulbes, combien vont germer ?

6. Indiquer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

   (a) Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$ avec $n \geqslant 2$ alors $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

   (b) Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 5 et p avec $P(X = 1) = \frac{3}{5}P(X = 0)$ alors $P(X = 2) = 3P(X = 3)$.

   (c) Si X est une variable qui suit une loi binomiale avec $E(X) = 36$ et $\sigma(X) = 3$ alors $P(X = 29) \approx 0,01$ à 10^{-3} près.

7. Les infections nosocomiales sont des infections contractées lors d'un séjour hospitalier. En France, la dernière enquête de prévalence en 2006 dans les établissements de santé a dénombré 18000 patients infectés sur 360000 personnes hospitalisées.
   Le jour de cette enquête nationale, près de 930 des 19400 patients hospitalisés dans les Pays de la Loire étaient atteints d'une ou plusieurs infections nosocomiales.
   Au seuil de 95%, les résultats en Pays de la Loire montrent-ils une différence significative par rapport aux résultats nationaux le jour de l'enquête ?

8. La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.
   On suppose que n touristes ($n \geqslant 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

   (a) Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leqslant k \leqslant n$) partent en direction de l'Est.
   (b) On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.
      i. Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
      ii. Démontrer que la probabilité (notée p) qu'il y ait un touriste heureux parmi ces touristes vaut $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
      iii. Application numérique : Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

9. Une urne contient 5 boules rouges et 7 boules noires. On en tire trois successivement et sans remise.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X .
   (b) Donner la loi de probabilité de X .
   (c) Calculer $E(X)$.

8 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

1. (a) $\binom{1}{6}$ représente le nombre de chemins conduisant à exactement un succès quand on répète 6 fois une épreuve de Bernoulli.
   Sa valeur est 6.

   (b) D'après la formule de PASCAL $\binom{2}{7} = \binom{2}{6} + \binom{1}{6}$.

   Soit $\binom{2}{7} = 15 + 6 = 21$.

   (c) $\binom{5}{7} = \binom{2}{7} = 15$.

2. $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$ car $\binom{2}{2} = \binom{3}{3} = 1$
   D'après la formule de PASCAL pour les deux premiers termes :
   $\binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$
   D'après la formule de PASCAL pour les deux premiers termes :
   $\binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$
   D'après la formule de PASCAL pour les deux premiers termes :
   $\binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$
   et comme $\binom{6}{3} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$
   On a bien $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3}$

3. On considère que le tirage a lieu avec remise et que les tirages sont indépendants les uns des autres.
   Le nombre X de résistances défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,005$.

   (a) $P(X = 2) = \binom{1000}{2} \times 0,005^2 \times 0,995^9 98 = 0,084$.

   (b) $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
   $P(X \leqslant 2) = \binom{1000}{0} \times 0,005^0 \times 0,995^1 000 + \binom{1000}{1} \times 0,005^1 \times 0,995^9 99 + \binom{1000}{2} \times 0,005^2 \times 0,995^9 98 = 0,124$

   (c) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,960$

4. (a) Les interrogations se font de façon indépendante et la probabilité d'interroger une fille est $p = \dfrac{2}{3}$.
   X suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{2}{3}$.

(b) Pour $n = 10$.
$P(X=4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 \approx 0,057$
$P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 0,980$.

(c) On cherche n pour que $P(X=0) \leqslant 0,001$ c'est à dire $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,001$ ou encore $\frac{1}{3^n} \leqslant 0,001$ soit $3^n > 1000$.
A l'aide de la calculatrice on obtient $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$.
Il faut donc interroger pendant au moins 7 jours consécutifs pour que la probabilité de n'avoir aucune fille soit inférieure à 0,001.

5. (a) Les 15 bulbes sont prélevés de manières indépendantes. Comme il y a un très grand nombre de bulbes, on peut assimiler ce tirage à un tirage sans remise.
Le nombre X de bulbes suit donc une loi binomiale de paramètres 15 et 0,83.

(b) $P(X=5) = \binom{15}{5} \times 0,83^5 \times (1-0,83)^1 0 \approx 0,00002$.

(c) $P(X \geqslant 9) = 1 - P(X < 9) = 1 - P(X \leqslant 8) \approx 0,993$.

(d) $E(X) = 15 \times 0,83 = 12,15$.
Il y a, en moyenne, 12 ou 13 bulbes qui germent.

6. (a) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$. La proposition est VRAIE.

(b) $P(X=1) = \frac{5}{3}P(X=0) \Longleftrightarrow 5p(1-p)^4 = \Longleftrightarrow 5p(1-p)^4 - \frac{5}{3}(1-p^5 = 0 \Longleftrightarrow 5(1-p)^4 \left[p - \frac{1}{3}(1-p)\right] = 0$.
Soit $5(1-p)^4\left(\frac{4}{3}p - \frac{1}{3}\right) = 0$.
On a donc $p = 1$ ou $p = \frac{1}{4}$.
On vérifie que :
si $p = 1$ alors $P(X=2) = 0$ et $3P(X=3) = 0$.
si $p = \frac{1}{4}$ alors $P(X=2) = \frac{135}{512}$ et $3P(X=3) = \frac{135}{512}$.
La proposition est VRAIE.

(c) $E(X) = 36 \Longleftrightarrow np = 6$.
$\sigma(X) = 3 \Longleftrightarrow \sqrt{np(1-p)} = 3 \Longleftrightarrow np(1-p) = 9$.
On en déduit que $36(1-p) = 9$ soit $p = \frac{3}{4}$ et $n = 48$. $P(X = 29 = \approx 0,01$.
La proposition est VRAIE.

7. Déterminons l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% des fréquences d'infections nosocomiales en France pour un échantillon de taille 19400.
On considère pour cela, la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 19400 et $\frac{18000}{360000}$ = 0,05.
Au seuil de 95% on cherche a et b tels que $P(X \leqslant a) > 0,025$ et $p(X \leqslant b)2 \geqslant 0,975$.
A l'aide de la calculatrice, on obtient $a = 911$ et $b = 1030$.
On obtient donc $911 \leqslant X \leqslant 1030$ soit $\frac{911}{19400} \leqslant f \leqslant \frac{1030}{19400}$ soit [0,0469 ; 0,0531] comme intervalle de fluctuation au seuil de 95%.
La fréquence d'infections nosocomiales dans les Pays de la Loire est de $\frac{930}{19400}$ soit environ 0,0479 qui appartient bien à l'intervalle de fluctuation. Donc on peut dire qu'il n'y a pas de différence significative entre les résultats des Pays de la Loire et les résultats nationaux.

8. (a) Le choix des n touristes est indépendant les uns des autres. Pour chacun, la probabilité de partir à l'Est est $\frac{1}{2}$ donc le nombre X de touristes qui part vers l'Est suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
$P(X=k)=\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

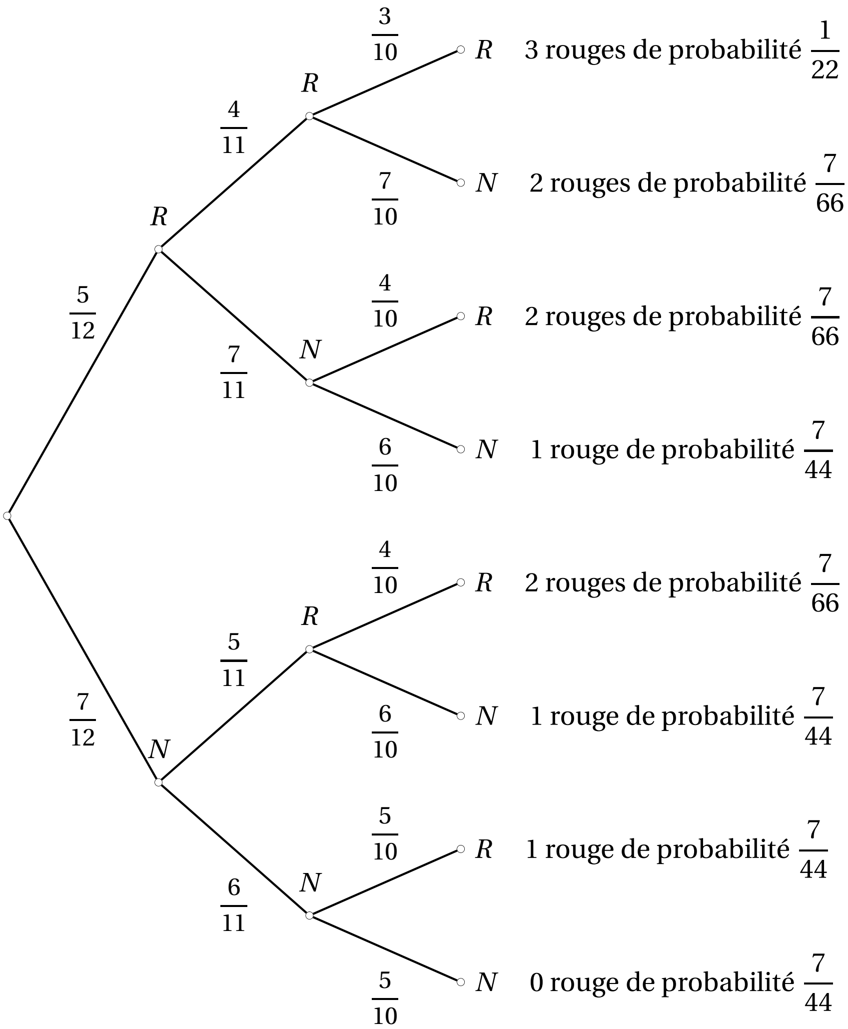
   (b) i. Comme n est supérieur à 3, si un touriste est seul sur un plage (et donc qu'il est heureux), il y en a au moins deux sur l'autre plage et il n'y a donc qu'un seul touriste heureux au maximum.

   ii. Un touriste est heureux s'il est seul sur la plage. Cela peut se produire sur la plage à l'Est (et ceci correspond à X = 1) ou à l'Ouest (et ceci correspond à x=n-1).
$p=P(X=1)+P(X=n-1)=\binom{n}{1}\times\left(\frac{1}{2^n}\right)+\binom{n}{n-1}\times\left(\frac{1}{2^n}\right)=n\times\frac{1}{2^n}+n\times\frac{1}{2^n}=\frac{2n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

   iii. Pour $n=10$, $p=\frac{10}{2^9}\approx 0,02$.

9. (a) Une urne contient 12 boules : 5 rouges et 7 noires. Comme le joueur tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
La variable aléatoire X égale au nombre de boules vertes tirées peut prendre les valeurs : 0 ,1 , 2 et 3.

   (b) Pour calculer les différentes probabilités on fait un arbre :



On a donc comme loi de probabilité pour la variable aléatoire X :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

présentation

(c) $E(X) = 0\times\frac{7}{44} + 1\times\frac{21}{44} + 2\times\frac{7}{22} + 3\times\frac{1}{22}$

soit $E(X) = \frac{5}{4}$.